

Kapitel 1

1.1 Mengen

$$A = B \hat{=} A \subset B \wedge B \subset A \quad (1)$$

$$A \subset B \hat{=} x \in A \implies x \in B \quad (2)$$

1.2 Mathematische Induktion

Beweistechnik im Raum der Natürlichen Zahlen

1. Induktionsanfang:
Aussage muss für kleinstes Element gelten
2. Induktionsvoraussetzung:
Aussage muss für definierte Voraussetzung erfüllt sein
 $a_n = b_n$ für ein $n \dots$
3. Induktionsschritt:
Gleichung für $n \rightarrow n + 1$ aufstellen
Induktionsvoraussetzung in $a_{n+1} = b_{n+1}$ einsetzen

1.3 Gaußsche/Geometrische Summenformel

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (3)$$

$$\prod_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (4)$$

1.4 Beträge

$$|a * b| = |a| * |b| \quad (5)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (6)$$

$$|a - b| \geq |a| - |b| \quad (7)$$

1.5 Beschränktheit

Teilmenge von $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt: Supremum
evtl. Maximum

Teilmenge von $\mathbb{R}$ nach unten beschränkt: Infimum
evtl. Minimum

1.6 Summen, Produkte, Bin. Formel

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{m+j} \quad (8)$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) * \left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_k b_j \quad (9)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (10)$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (11)$$

1.7 Trigonometrische Formeln

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad (12)$$

$$\cos(-x) = \cos x = \cos(2\pi - x) \quad (13)$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (14)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (15)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (16)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad (17)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

$$\arcsin = [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (19)$$

$$\arccos = [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \quad (20)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (21)$$

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad x \in (-\pi, \pi) \quad (22)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (23)$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad x \in (-\pi, \pi) \quad (24)$$

1.8 Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1 \quad (25)$$

$$z = a + bi \quad z \in \mathbb{C} \quad (26)$$

$$\bar{z} = a - bi \quad (27)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = z * \bar{z} \quad (28)$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad r = |z| \quad \varphi = \arg z \quad (29)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{a}{r} & \text{Im} \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{r} & \text{Im} < 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$z = r e^{i\varphi} \quad (31)$$

$$z * w = |z| * |w| * e^{i\varphi + i\psi} \quad (32)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (33)$$

Quadratische Ergänzung

Mitternachtsformel für $b^2 - 4ac < 0$:

$$z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{i}{2a} \sqrt{4ac - b^2} \quad (34)$$

2 Kapitel 2

2.1 Folgen, Grenzwerte

Eine Folge a_n ist beschränkt, falls $|a_n| \leq K$
 $K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2.2 Konvergenz

Monoton und beschränkt $\rightarrow$ konvergent

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad (35)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ oder } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad (36)$$

Zum umwandeln von Brüchen mit höchstem Exponenten kürzen, Wurzeln mit 3. binomischer Formel erweitern, evtl. Variablen aus Wurzel "herausziehen" $\rightarrow \sqrt{x^2 * a} = x\sqrt{a}$

$$\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (37)$$

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (38)$$

$$\frac{n^r}{q^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (39)$$

2.3 Divergenz

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N_k \in \mathbb{N}, \text{ sodass } a_n > K / a_n < K, \quad (40)$$

$$n > N_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty \text{ oder } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty \quad (41)$$

2.4 Sandwich-Theorem

Im Fall $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n > N \quad N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad (42)$$

2.5 Fixpunktgleichung

Für rekursive Folgen $a_{n+1} = f(a_n)$ (Konvergenz bekannt) gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (43)$$

$$a = f(a) \quad (44)$$

2.6 Cauchy-Konvergenzkriterium

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n > N_\varepsilon \quad (45)$$

2.7 Bernoulli-Ungleichung

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \forall n \in \mathbb{N}, a \geq -1 \quad (46)$$

2.8 Teilfolgen

Teilfolge von a_n : a_{n_k} , n_k str. mon. wachsende Folge aus $\mathbb{N}$

$$\text{Häufungspunkt von } a_n : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = b \quad (47)$$

Eine Folge konvergiert gegen a genau dann wenn alle Teilfolgen gegen a konvergieren.
Jede beschränkte Folge hat min. eine konvergente Teilfolge.

2.9 Reihen

Reihen sind Folgen von Partialsummen

$$\text{Folge } a_n : s_n = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow \text{Reihe konvergent, wenn:} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad (48)$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1, \text{ sonst divergent} \quad (49)$$

Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert für } \alpha > 1 \quad (50)$$

2.10 Kriterien für Reihen

$$\text{Notwendig nicht hinreichend: } a_n \rightarrow 0 \quad (51)$$

$$\text{Cauchy für Reihen: } \sum_{k=m+1}^n a_k = |s_n - s_m| < \epsilon, \quad (52)$$

$$\text{für alle } m, n > N_\epsilon \quad n > m \quad (53)$$

2.11 Leibnitz Kriterium

Wenn a_n monoton fallende Nullfolge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konvergiert} \quad (54)$$

2.12 Vergleichskriterium

Gilt $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq N$ $N \in \mathbb{N}$, dann folgt:

$$\begin{aligned} \text{Ist } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergent, dann ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abs. konvergent} \\ \text{Ist } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergent, dann ist } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergent} \end{aligned} \quad (55)$$

2.13 Quotientenkriterium

Für $q < 1$ konvergiert die Reihe absolut, für $q > 1$ divergiert sie. Ist $q = 1$ gegeben ist keine Aussage mit dem Quotientenkriterium möglich

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (56)$$

2.14 Wurzelkriterium

Gleich wie Quotientenkriterium ($\mu = q$)

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (57)$$

2.15 Funktionsgrenzwerte

$$\text{Def: } I \subset \mathbb{R}, f : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I \quad (58)$$

f rechtsseitiger Grenzwert von x gegen a :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c : \forall (x_n) \text{ in } I, x_n > a, x_n \rightarrow c : f(x_n) \rightarrow c$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c : \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in I, x \neq a \quad (59)$$

$$\text{mit } |x - a| < \delta : |f(x) - c| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ (für stetige Funktionen)}$$

$$\text{Sandwich: } g(x) \leq f(x) \leq u(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (60)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} u(x) = c \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

$$\text{Wichtige Grenzwerte:} \quad (61)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{n}{m}$$

2.16 Stetige Funktionen

f stetig in x_0 , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Stetige Funktionen sind: Polynome, Exponentialfunktion, Sinus-/eKosinusfunktion, $\frac{p(x)}{q(x)}$ wenn $q(x) \neq 0$, Wurzeln, Beträge

$$\text{Satz: Für } I = [a, b], \quad f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig:} \quad (62)$$

$$|f(x)| \leq C \text{ für alle } x \in I$$

$$m = \min_{x \in I} f(x) = f(x_{\min}) \text{ und } M = \max_{x \in I} f(x) = f(x_{\max})$$

Jeder Zwischenwert $m \leq c \leq M$ wird angenommen:

$$\exists \xi \in I : c = f(\xi) \text{ woraus folgt:}$$

$$[a, b] \text{ verschiedene Vorzeichen: min. 1 NS } x_0 \in (a, b)$$

$$f : [a, b] \rightarrow [a, b] \text{ stetige Selbstabbildung:}$$

$$\exists \text{Fixpunkt } \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) = \bar{x} \quad (63)$$

2.17 Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$, Potenzreihen

$z_n \in \mathbb{C}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$.
 z_n konvergiert gegen $z \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$ und
 $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$. $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent $\implies \sum_{n=0}^{\infty} z_n$
 absolut konvergent, es gelten die Kriterien
 wie bei Reihen in $\mathbb{R}$

Potenzreihen: (64)

$$\text{Schema } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (65)$$

$$\text{Konvergenzradius } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \quad (66)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$$\text{Limes Superior: Größter Häufungspunkt von } x_n \\ \longrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (67)$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty; \frac{1}{\infty} = 0\right) \quad (68)$$

2.18 Exponentialfunktion

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} \approx 2,718 \approx 3 \approx \pi \quad (69)$$

$$\exp x = e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (70)$$

$$z \in \mathbb{C} : e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (71)$$

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z} \quad (72)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (73)$$

2.19 Ableitungen

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (74)$$

$$\text{In } x_0 \text{ differenzierbar} \implies \text{in } x_0 \text{ stetig} \quad (75)$$

$$\text{Globales Maximum: } f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D \quad (76)$$

Lokales Maximum:

$$\exists \epsilon : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \quad (77)$$

2.20 Satz von Rolle

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, diff'bar auf } (a, b), \\ f(a) = f(b) \quad \exists x_0 \in (a, b), f'(x_0) = 0 \quad (78)$$

Eine stetige, diff'bare Funktion, welche zweimal den gleichen Funktionswert mit unterschiedlichen Werten erzielt, hat min. eine Stelle wo die erste Ableitung auf dem Intervall 0 ist.

2.21 Mittelwertsatz

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, diff'bar auf } (a, b) \quad (79)$$

$$\implies \exists x_0 \in (a, b), f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (80)$$

Die Steigung der Gerade, welche a und b schneidet, wird zwischen beiden Werten bei jeder stetigen, diff'baren Funktion min. einmal angenommen.

2.22 Wichtige Ableitungen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, R > 0 \implies f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (81)$$

$$\text{Erweiterte Produktregel: } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (82)$$

2.23 L'Hospital'sche Regel

Ist $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar und $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ vorhanden, gilt

$$\text{Falls } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0 \text{ oder } \infty : \quad (83)$$

$$\text{Dann ist } \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (84)$$

2.24 Integration

$$f \text{ stetig} \longrightarrow f \text{ integrierbar} \quad (85)$$

$$f \text{ monoton} \longrightarrow f \text{ integrierbar} \quad (86)$$

$$f \text{ integrierbar} \longrightarrow |f| \text{ integrierbar} \quad (87)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx \quad (88)$$

$$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (89)$$

2.25 Mittelwertsatz

Wenn $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, sowie $g'(x) \geq 0$:

$$\longrightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) g(x) dx \\ = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (90)$$

Falls $g(x) = 1$:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi) \quad \xi \in [a, b] \quad (91)$$

2.26 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wenn $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f , dann:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad (92)$$

2.27 Partielle Integration

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx \quad (93)$$

2.28 Substitution

$$y = g(x), \quad \frac{du}{dx} = g'(x), \quad dx = \frac{1}{g'(x)} du \quad (94)$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy \quad (95)$$

2.29 Potenzreihen integrieren

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \quad (96)$$

$$R_f = R_F \quad (97)$$

2.30 Integrale einfach integrieren

Wenn $\int f(x)dx$ mit $f(x)$ kompliziert, dann: (98)

Fall 1: Komplizierte Verkettungen: Sind max. 4. Punkte, ignorieren.

Fall 2: Sieht nach partieller Integration aus: 5min. daran verzweifeln, 20min. bei 180° Ober- und Unterhize backen lassen, danach Klausur leer abgeben (ohne tränen)

2.31 Partialbruchzerlegung Rezept

Gesucht:

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad (99)$$

Schritt 1:

$$\text{Grad } p \geq \text{Grad } q \quad (100)$$

$$\rightarrow \text{Polynomdivision } f(x) = p_0(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

Schritt 2:

Nenner faktorisieren (reelle Nullstellen und quadratische Terme)

Schritt 3:

$$\frac{p_1(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-b} + \frac{B}{(x-b)^2} + \dots + \frac{Cx+D}{(x-a)^2+d^2} \quad (101)$$

$$(\text{Koeffizientenvergleich}) \quad (102)$$

Schritt 4:
Stammfunktion finden

2.32 Wichtige Integrale

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (103)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (104)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (105)$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C \quad (106)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad (107)$$

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C \quad (108)$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, \quad n > 2 \quad (109)$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C, \quad b > 0 \quad (110)$$

$$\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx = \frac{1}{2} \ln((x-a)^2+b^2) + C \quad (111)$$

2.33 Uneigentlich Integrale

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx \quad (112)$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^a f(x) dx \quad (113)$$

$$f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx \quad (114)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & a < 1 \\ +\infty, & a \geq 1 \end{cases} \quad (115)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases} \quad (116)$$

2.34 Taylorentwicklung